

L'apport des modèles périodiques à longue mémoire pour la modélisation de l'effet jour sur la volatilité des séries financières²⁷

Sébastien Laurent
Jean-Pierre Urbain
Université de Liège
University of Maastricht

Résumé

Dans cet article nous proposons d'étendre l'approche proposée par Bollerslev et Ghysels (1996) et Franses et Paap (1999) pour la modélisation des effets journaliers sur la volatilité des séries financières. Pour ce faire, nous proposons un modèle de séries temporelles qui intègre à la fois une modélisation explicite de la périodicité journalière de la volatilité des séries et le caractère « longue mémoire » de ces dernières, caractère qui a été récemment illustré dans la littérature empirique. Le modèle proposé (PAR-PFIGARCH) est appliqué à différentes séries d'indices boursiers nationaux. Les résultats empiriques obtenus montrent l'intérêt de l'approche retenue et contribuent à une meilleure modélisation des liens existants entre la persistance observée des chocs de volatilité et leur saisonnalité journalière.

1. Introduction

Au cours des dernières décennies, un nombre important d'études empiriques en finance se sont concentrées sur ce qu'il est désormais commun d'appeler des anomalies des marchés financiers, c'est-à-dire des phénomènes observables difficilement explicables d'un point de vue purement théorique (voir *entre autres* les travaux repris dans Dimson, 1988). Parmi ces anomalies, plusieurs effets saisonniers (effet janvier, effet lundi,...) ont été mis à jour pour une multitude de séries financières, de périodes d'observation et de différents marchés nationaux. En matière de saisonnalité journalière, ces études se sont souvent intéressées à « l'effet week-end » qui pour un grand nombre de places boursières se traduit par des rendements significativement plus faibles, voire même négatifs, les lundis, et des rendements souvent fort élevés le vendredi avant la fermeture des marchés. Une liste non-exhaustive comprend les travaux d'Abraham et Ikenberry (1994), Bessembinder et Hertzell (1993), French (1980), Foster et Viswanathan (1990),

²⁷ Les auteurs tiennent à remercier Aurélie Boubel, Christelle Lecourt et en particulier Bernard Lejeune pour une lecture très attentive d'une version préliminaire de cet article.

Keim et Staumbaugh (1984), Lakonishok et Smidt (1988), Lakonishok et Levi (1982), Levi (1988), Thaler (1997). L'origine exacte de cet effet *week-end* ou effet *du lundi* ou encore *effet jour de la semaine*²⁸, est difficile à expliquer. Diverses raisons sont fréquemment avancées. Certains auteurs évoquent l'arrivée plus massive de nouvelles nouvelles (« bad news ») après la fermeture du vendredi, alors que les « hommes nouvelles » surviennent pendant la semaine. D'autres auteurs avancent l'idée d'une accumulation de nouvelles pendant les jours de fermeture, ou attribuent l'effet *week-end* à un volume de transactions nettement moins élevé les lundis, ou encore expliquent cet effet par la différence de comportement entre les investisseurs individuels et institutionnels (Lakonishok et Maberly, 1990, Lakonishok et Smidt, 1988), ces derniers prenant des décisions d'investissement pendant la semaine alors que les premiers seraient essentiellement actifs pendant le *week-end*. Un dernier type d'explications (Levi, 1988) fréquemment avancé est lié aux spécificités et réglementations nationales d'organisation des marchés financiers (« settlement procedures »).

D'un point de vue empirique, certains résultats apparaissent assez robustes aux choix des périodes étudiées, aux types de données, aux techniques utilisées, etc. Parmi ceux-ci, on peut mentionner la différence significative entre les rendements des lundis et ceux obtenus les autres jours de la semaine, le caractère en général supérieur des rendements du vendredi, la corrélation souvent négative entre les rendements du lundi et ceux du vendredi, etc. Si on envisage également la volatilité, c'est à dire la variabilité instantanée, des séries et/ou les moments d'ordre supérieur, des observations similaires peuvent être faites puisque la volatilité du marché semble en général être plus importante le lundi que le reste de la semaine et la structure dynamique de la volatilité semble, elle aussi, témoigner d'assez évidents effets saisonniers (Ederington et Lee, 1993).

L'observation d'une structure saisonnière non-constante des autocorrélations des rendements boursiers nécessite le recours à une classe de modèles plus riches que les modèles linéaires standards de séries temporelles qui supposent une constance de la structure d'autocorrélation. Ce dernier point a amené certains auteurs tels Abraham et Ikenberry (1994) ou Bessembinder et Hertzfel (1993) à utiliser des modèles de séries temporelles périodiques qui admettent explicitement une structure d'autocorrélation qui peut varier au travers de la semaine. Cette classe de *modèles périodiques* a été largement étudiée tant d'un point de vue théorique qu'empirique comme en témoigne le récent ouvrage de Franses (1996). Elle couvre une multitude de modèles univariés ou multivariés qui s'avèrent fort utiles pour modéliser les phénomènes économiques saisonniers. Leur utilisation en finance empirique reste néanmoins relativement peu courante en comparaison aux simples modèles linéaires de régressions. Citons les travaux de Bessembinder et Hertzfel (1993) ou d'Abraham et Ikenberry (1994) qui utilisent des autorégressions périodiques (Periodic AutoRegression, PAR) pour l'analyse de la structure

²⁸ Dans la suite de cet article, nous ne ferons pas de distinction entre ces différentes dénominations.

d'autocorrélation des rendements aux alentours des jours de fermeture alors qu'il y a une contribution assez importante, Bollerslev et Ghysels (1996) appliquent un raisonnement similaire à la modélisation de la dynamique de la volatilité des séries financières. Pour ce faire, ils proposent un modèle GARCH périodique (PGARCH) qu'ils appliquent avec succès à des séries de taux de change ainsi qu'à certains indices boursiers. L'avantage évident de cette approche est qu'elle permet une représentation assez flexible des effets saisonniers, et des périodicités diverses si la volatilité des séries financières. Franses et Paap (1999), quant à eux, unifient ces deux types d'études en proposant une modélisation économétrique des rendements financiers intégrant à la fois périodicité observée en moyenne avec celle observée en volatilité : le modèle PAR-PGARCH. Leurs résultats, ainsi que ceux obtenus par Bessembinder et Hertzfel (1993), mettent assez clairement en évidence non seulement une structure périodique dans l'autocorrélation des rendements, mais aussi des effets périodiques dans la persistance de la volatilité.

Le but de notre article est d'étendre l'approche proposée par Bollerslev Ghysels (1996) et par Franses et Paap (1999) à la classe des modèles à long mémoire, classe de modèles désormais assez populaires en finance empirique (Pagan, 1996, Baillie, 1996, Breidt, Crato et de Lima, 1998). La distinction entre processus à mémoire longue et processus à mémoire courte est en effet assez importante d'un point de vue empirique puisque dans le premier cas un choc affectant la série, ou sa volatilité, a un effet qui peut perdurer sur une très longue période (voire même sur un horizon infini). Pour motiver ce propos et pour éclairer le lecteur, nous avons représenté graphiquement (Figure 1) les 1 000 premiers autocorrélations de la valeur absolue²⁹ des variations de l'indice Standard au Poor's 500 (S&P 500) sur des données journalières allant du 3 Janvier 1980 au Juin 1999. Les lignes discontinues représentent l'intervalle de confiance à 95 % de Bartlett.

²⁹ Ding et al. (1993) proposent d'utiliser les valeurs absolues des rendements, comme approximation de la volatilité.

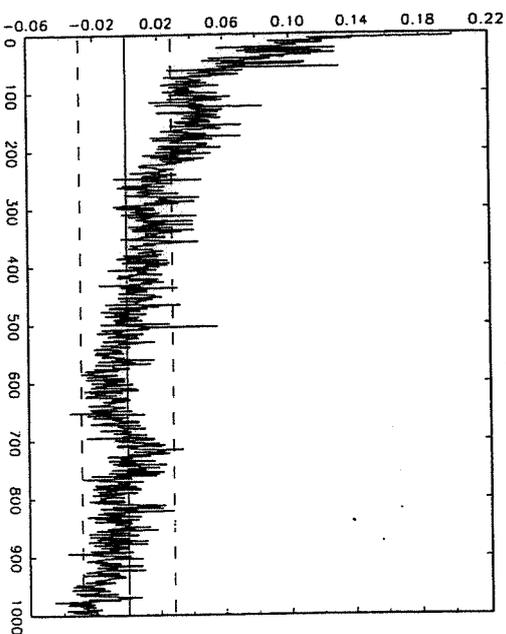


Figure 1 : Autocorrélation (retards 5 à 1000) de la valeur absolue des variations du S&P 500 ($|y_t|$).

De cette figure ressort très clairement la très longue persistance des autocorrélation (mémoire longue) de la valeur absolue des variations du S&P 500 ($|y_t|$). En effet, les coefficients d'autocorrélation décroissent de manière hyperbolique et sont significativement différents de zéros³⁰ jusqu'à l'ordre de retard 350 (environ 1 an et demi). Ceci est confirmé par la valeur très élevée (5052,4) du test portemanteau de Box-Pierce à 500 retards. Cette structure des autocorrélation est toutefois très différente des processus standard du type ARMA. Comme le montre la Figure 2, la persistance des autocorrélation est fortement réduite lorsque l'on différencie une fois cette série ($[1-L]y_t$), ce qui est également confirmé par statistique de Box-Pierce (2044,2). Une analyse plus fine des autocorrélation partielles montre néanmoins une assez claire sur différenciation.

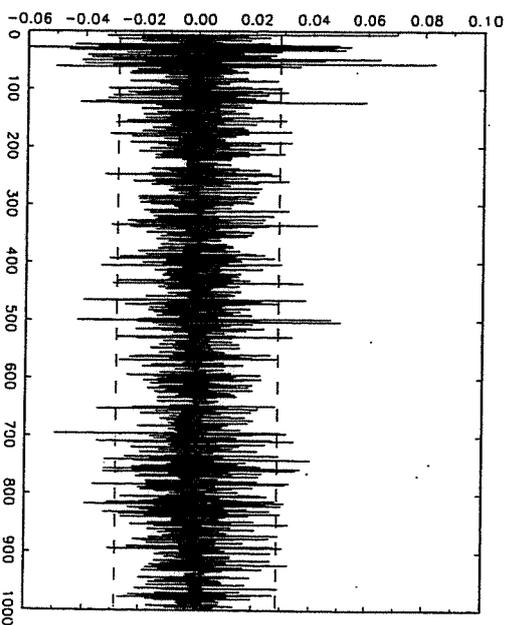


Figure 2 : Autocorrélation (retards 5 à 1000) de la différence première de la valeur absolue des variations du S&P 500 ($[1-L]|y_t|$).

Par conséquent, il est évident que la transformation optimale de la série $|y_t|$ doit être comprise entre ces deux cas extrêmes, c'est-à-dire $[1-L]^d |y_t|$, ou $0 < d < 1$. Un tel processus est dit fractionnairement intégré. Un choix arbitraire de $d = 0,5$ réduit considérablement le degré de persistance des autocorrélation (la statistique de Box-Pierce associée est de 1275,5).

Notons de suite qu'une discussion formelle du concept de persistance des chocs sur la trajectoire d'une série chronologique, bien qu'essentielle, ne sera pas abordée dans le cadre de cet article³¹. Toutefois, afin de clarifier les concepts, nous pouvons de manière plus formelle définir ce que nous entendons par processus à mémoire longue ou à courte mémoire. En suivant la définition proposée par Brockwell et Davis (1998), voir aussi Baillie (1996), nous dirons qu'un processus stationnaire d'ordre deux est caractérisé par une courte mémoire si sa fonction d'autocorrélation est géométriquement bornée. Plus précisément, si nous désignons par $\rho(\tau) = \text{Cor}(y_t, y_{t-\tau})$ l'autocorrélation au retard τ , un processus $\{y_t\}$ sera dit à courte mémoire si $|\rho(\tau)| \leq k\tau^{-1}$ pour $k > 0$, $0 < \tau < 1$ et τ assez grand. Au contraire, un processus faiblement stationnaire sera dit à longue mémoire si sa fonction d'autocorrélation décroît de manière hyperbolique (voir Brockwell et David, 1998),

³⁰ Les coefficients d'autocorrélation excèdent l'intervalle de confiance à 95 % de Bartlett.

³¹ Si ces concepts sont relativement simples à définir pour les processus linéaires, il n'en va pas de même pour les processus non-linéaires comme les processus GARCH, voir par exemple Baillie *et al.* (1996).

c'est à dire si $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(\tau) = k\tau^{2d-1}$ avec $d < 0,5$ et $k \neq 0$. Quand $d > 0$, le processus $\{y_t\}$ sera dit persistant puisque la fonction d'autocorrélation n'est pas sommable ($\sum |\rho(\tau)| = \infty$). Pour une discussion plus détaillée des ces concepts nous renvoyons le lecteur à Baillie (1996).

La structure du papier est la suivante. Dans la section 2, nous présentons l'approche proposée pour analyser la présence d'effet jour à la fois sur la moyenne et la volatilité des séries financières. La section 3 décrit les données retenues ainsi que les résultats de notre analyse empirique. Une dernière section présente nos conclusions, les limites et extensions possibles de l'approche que nous proposons.

2. Le modèle PAR-PFIGARCH

Dans cette section nous rappelons tout d'abord l'approche retenue par Bollerslev et Ghysels (1996) et Franses et Paap (1999) avant de l'étendre aux processus à longue mémoire. Pour simplifier la présentation et la rendre la plus transparente possible, nous limiterons notre présentation au cas où la volatilité des séries financières considérées peut être modélisée par un processus GARCH (p, q). Cette classe de modèles est devenue très populaire en finance empirique puisqu'elle fournit un cadre d'analyse bien adapté au test des principales théories financières (APT, CAPM, ...) grâce à la prise en compte de caractéristiques importantes des séries financières (« clusters » de volatilité, leptokurticité, asymétrie, ...). Pour des survols de la littérature ainsi qu'une présentation détaillée des multiples extensions (non-linéaires, multivariées ...) de cette classe de modèles nous renvoyons le lecteur aux travaux de Bera and Higgins (1994), Bollerslev, Chou et Kroner (1992), Bollerslev, Engle et Nelson (1994), Drostbeke *et al.* (1994), Gouriéroux (1992), Palm (1996) et Pagan (1996).

2.1 Modèles GARCH, IGARCH

Si nous désignons par ε_t le terme d'erreur d'un modèle de régression ou l'innovation d'un modèle ARIMA supposé représenter de manière adéquate l'espérance conditionnelle d'une série financière y_t , alors la spécification standard du modèle GARCH(p, q) proposée par Bollerslev (1986) s'écrit :

$$\varepsilon_t = y_t - E[y_t | \Omega_{t-1}], \quad (1)$$

$$\eta_t \sim N(0, 1); \quad (2)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}, \quad (3)$$

où Ω_{t-1} désigne l'ensemble d'information disponible jusqu'à la période $t-1$ et la forme spécifique de $E[y_t | \Omega_{t-1}]$ dépend du choix retenu pour la modélisation de la moyenne conditionnelle de la série³²

Si nous notons L l'opérateur de retard, i.e. $Ly_t = y_{t-1}$, (3) s'écrit :

$$h_t = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)h_{t-1}, \quad (4)$$

avec $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q$ et $\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p$.

Ce processus peut être réécrit sous la forme d'un modèle ARCH d'ordre infini :

$$h_t = \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + \alpha(L) [1 - \beta(L)]^{-1} \varepsilon_t^2. \quad (5)$$

Le processus GARCH(p, q) peut encore être reformulé comme un modèle ARMA($\max(p, q), p$) hétéroscédastique pour ε_t^2 en définissant $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, de sorte que $E(v_t | \Omega_{t-1}) = 0$ et donc (4) devient :

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)] \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)] v_t. \quad (6)$$

Le processus sera stable et stationnaire d'ordre deux si les racines des polynômes $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$ et $[1 - \beta(L)]$ sont toutes extérieures au cercle unitaire.

Une caractéristique assez courante des séries financières (rendement, taux d'intérêt, taux de change, ...) est la présence de phénomènes de persistance de chocs sur la volatilité, c'est-à-dire l'existence de racines de modules proches de (c'est-à-dire égales à) 1 dans le polynôme $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$. Dans ce cas, on parle de GARCH intégré (IGARCH) qui s'écrit simplement :

$$\phi(L)(1-L)\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t, \quad (7)$$

où le polynôme $\phi(L)$ est défini par $[1 - \alpha(L) - \beta(L)](1-L)^{-1}$ est d'ordre $\max(p, q)$.

1. Bien qu'étant strictement stationnaire, le processus IGARCH n'est pas faiblement stationnaire (Nelson, 1991) et donc l'effet des chocs sur la variance conditionnelle future sera permanent impliquant des prévisions de volatilité explosives. Le manque d'arguments économiques permettant d'expliquer un tel phénomène est à la base d'une des critiques majeures émises à l'encontre de

³² Les conditions suffisantes de positivité de la variance conditionnelle h_t sont $\alpha_i, \beta_j > 0, i=1, \dots, q, j=1, \dots, p$ et $\omega > 0$.

processus IGARCH. D'autre part, les autocorrélations empiriques des valeurs absolues des rendements (ou des puissances de celles-ci) décroissent rapidement dès les premiers retards mais témoignent pour des plus longs retards, d'une décroissance hyperbolique (voir Figure 1). De son côté, le processus GARCH stationnaire implique quant à lui une décroissance exponentielle de ces autocorrélations et peut donc difficilement rendre compte de cette structure dynamique des rendements financiers. La fonction d'autocorrélation du carré des résidus du modèle IGARCH de Engle et Bollerslev (1986) décroît, elle aussi, de manière exponentielle (Ding et Granger, 1996).

2.2 Modèle FIGARCH

En réponse à cette limitation, certains auteurs, Baillie *et al.* (1996), Robinson (1991) ont proposé une version modifiée du processus IGARCH en étendant le concept de mémoire longue utilisé dans la moyenne conditionnelle (Hosking, 1984, Granger et Joyeux, 1980), aux moments d'ordre deux, à savoir la variance conditionnelle. L'idée fondamentale est de permettre à un choc sur la volatilité d'exercer un effet qui perdure sur une fort longue période tout en imposant à cet effet de décroître de manière hyperbolique au cours du temps de manière à générer une structure d'autocorrélation plus proche de celle observée empiriquement : c'est le modèle FIGARCH (ou processus GARCH fractionnairement intégré). Ce modèle est obtenu en remplaçant dans (7) l'opérateur de différence $(1-L)^d$ par l'opérateur de différence fractionnaire $(1-L)^d$:

$$\phi^*(L)(1-L)^d \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t \quad (8)$$

avec $\phi^*(L) = [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1-L)^{-d} = [1 - \theta(L)]$ et $\theta(L) = \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots$. Le degré d'intégration fractionnaire d peut prendre différentes valeurs réelles comprises entre 0 et 1. Notons que (8) peut aisément être réécrite en terme de la variance conditionnelle h_t pour donner la représentation traditionnelle du modèle FIGARCH :

$$[1 - \beta(L)]h_t = \omega + [1 - \beta(L) - [1 - \theta(L)](1-L)^d] \varepsilon_t^2, \quad (9)$$

ou encore,

$$h_t = \omega [1 - \beta(L)]^{-1} + \lambda(L) \varepsilon_t^2, \quad (10)$$

$$\text{avec } \lambda(L) = [1 - [1 - \beta(L)]^{-1} [1 - \theta(L)](1-L)^d].$$

En pratique, pour évaluer l'opérateur de différentiation fractionnaire, on utilise son expansion binomiale infinie (voir Baillie *et al.*, 1996) qui peut se représenter en utilisant la fonction hypergéométrique suivante :

$$(1-L)^d = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-d)} L^i, \quad (11)$$

où $d > 0$ et $\Gamma(\cdot)$ représente la fonction Gamma usuelle. Remarquons que la spécification FIGARCH(p, d, q) englobe le cas standard du GARCH intégré ($d = 1$) et du GARCH(p, q) non-intégré ($d = 0$).

Ces spécifications, ainsi que quelques extensions prenant en compte les effets d'asymétrie, ont été appliquées avec succès à la modélisation de la volatilité de séries financières entre autres par Baillie *et al.* (1996), Beine *et al.* (1999), Bollerslev et Mikkelsen (1996, 1999), Breidt *et al.* (1998), McCurdy et Michaud (1997), Tse et Tsui (1996). La conclusion générale de ces travaux est que la dépendance de long terme, souvent observée dans la volatilité des séries retenues, semble bien modélisée par un processus fractionnairement intégré. Cette caractéristique correspond de plus à la forme hyperbolique décroissante de la fonction d'autocorrélation des valeurs absolues des rendements boursiers ou de leurs carrés. Les implications et avantages de cette modélisation de la volatilité des rendements financiers en termes d'évaluation d'actifs dérivés (options, ...) sont analysés par Bollerslev et Mikkelsen (1996, 1999).

2.3 Modèle GARCH périodique

Les modélisations que nous venons de présenter n'intègrent pas en tant que telles éléments saisonniers et/ou périodiques, pourtant fréquemment observés pour les séries financières.

Une première façon de prendre en compte les effets jours dans la volatilité serait d'introduire une série de variables muettes journalières dans la spécification standard du GARCH. Une telle modélisation suppose que ces effets jours ont un impact direct sur la variance non-conditionnelle des séries envisagées sans pour autant affecter la dynamique de la volatilité, ce qui est assez restrictif.

Une alternative consiste à étendre la classe des modèles précédents en y introduisant une structure périodique. Cette extension a été initialement proposée par Bollerslev et Ghysels (1996) qui motivent leur approche par l'observation que les coefficients de volatilité et de persistance varient fréquemment avec les périodicités des séries observées, que celles-ci soient fixes (effets saisonniers) ou non (fermeture, vacances, ...). Étant donné que des effets périodiques sont également observés au niveau de la moyenne conditionnelle des séries financières, Franses et Paap (1999) proposent de modéliser celle-ci par une structure autorégressive périodique admettant des coefficients autorégressifs différents pour

les cinq jours de la semaine ($s = 1, \dots, 5$). Si nous définissons par $D_{s,t}$ une variable muette valant 1 si $t = s$, et 0 si $t \neq s$, la spécification du modèle PGARCH (1,1) proposée par ces auteurs peut alors s'écrire dans le cas d'un GARCH(1,1) :

$$\tilde{\varepsilon}_t \equiv y_t - \sum_{s=1}^5 \left(\mu_s + \sum_{i=1}^p \phi_{is} y_{t-i} \right) D_{s,t} = \sqrt{h_t} \eta_t, \quad (12)$$

$$\tilde{\varepsilon}_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t),$$

$$h_t = \sum_{s=1}^5 D_{s,t} \left(\omega_s + \alpha_{1,s} \tilde{\varepsilon}_t^2 + \beta_{1,s} h_{t-1} \right). \quad (13)$$

Notons que la spécification (12) n'est autre qu'une structure autorégressive périodique (PAR) alors que la forme de la variance conditionnelle retenue en (13) permet au processus GARCH(1,1) d'avoir des coefficients qui varient avec la saisonnalité.

Les propriétés statistiques de cette classe de modèles sont étudiées dans Bollerslev et Ghysels (1996) ainsi que dans Franses et Paap (1999). Pour des raisons pratiques, et étant donné que les effets jours sont probablement des effets essentiellement de court terme, seuls les coefficients $\alpha_{1,s}$ seront supposés varier avec les jours dans notre analyse empirique. Remarquons que la forme ARMA (hétéroscedastique) périodique correspondante pour $\tilde{\varepsilon}_{t-1}$ s'écrit :

$$\left[1 - \sum_{s=1}^5 D_{s,t} (\alpha_{1,s} + \beta_{1,s}) L \right] \tilde{\varepsilon}_t^2 = \sum_{s=1}^5 D_{s,t} \omega_s + [1 - \beta_{1,s} L] v_t, \quad (14)$$

avec $v_t = \tilde{\varepsilon}_t^2 - h_t$. Cette spécification contient des paramètres $(\alpha_{1,s} + \beta_{1,s})$ qui varient dans le temps de sorte que le processus n'est pas stationnaire. Notons cependant qu'une reparamétrisation avec coefficients constants peut être déduite et s'avère utile pour analyser les conditions de stationnarité et de positivité dans cette classe de modèles (pour plus de détails, voir Franses et Paap, (1999)). De plus, il est possible de montrer que (13) se réduit à un GARCH non-périodique si $\alpha_{1,s} = \alpha$ pour tout s . De même, le modèle (13) se réduit au IGARCH si $(\alpha_{1,s} + \beta_{1,s}) = 1$ pour tout s et sera finalement dit *périodiquement intégré* si $\prod_{s=1}^5 (\alpha_{1,s} + \beta_{1,s}) = 1$. Pour une discussion des modèles périodiquement intégrés, voir Boswijk et Franses (1996), Franses (1996). Dans ce dernier cas, les chocs de volatilité auront une persistance infinie. Notons que cette condition permet à au moins une des valeurs

de $(\alpha_{1,s} + \beta_{1,s})$ d'excéder 1. Quand cette dernière restriction est introduite dans (14), on observe que la volatilité saisonnière peut évoluer suivant l'accumulation (infinie) de chocs v_t .

2.4 Modèle GARCH périodique à mémoire longue

Dans le cadre de cet article, nous proposons d'étendre le PAR-P(IG)ARCH en modifiant la spécification de la variance conditionnelle de manière à prendre en compte le caractère de longue mémoire de la volatilité. Pour ce faire, nous adaptons la spécification FIGARCH proposée par Baillie *et al.* (1996) au cas périodique. Dans le cas PAR-PFIGARCH(1,d,1), ce modèle peut s'écrire :

$$\tilde{\varepsilon}_t \equiv y_t - \sum_{s=1}^5 \left(\mu_s + \sum_{i=1}^p \phi_{is} y_{t-i} \right) D_{s,t} = \sqrt{h_t} \eta_t, \quad (15)$$

$$\tilde{\varepsilon}_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, h_t),$$

$$h_t = \sum_{s=1}^5 D_{s,t} \omega_s + \left(1 - [1 - \beta_{1,s} L]^{-1} (1 - L)^d \left[1 - \sum_{s=1}^5 D_{s,t} \theta_{1,s} L \right] \right) \tilde{\varepsilon}_t^2, \quad (16)$$

(16) peut être réécrit sous la forme d'un processus ARMA d'ordre infini :

$$(1-L)^d \left[1 - \sum_{s=1}^5 D_{s,t} \theta_{1,s} L \right] \tilde{\varepsilon}_t^2 = \sum_{s=1}^5 D_{s,t} \omega_s + [1 - \beta_{1,s} L] v_t, \quad (17)$$

où $v_t = \tilde{\varepsilon}_t^2 - h_t$ (innovation au temps t).

Malgré sa forme apparemment compliquée, la volatilité conditionnelle est ici simplement représentée par un FIGARCH périodique qui garde donc tous les avantages des spécifications proposées plus haut en y ajoutant celui non négligeable de prendre en compte la décroissance hyperbolique des chocs de volatilité sur de longues périodes.³³ Les conditions de positivité de la variance conditionnelle pour un FIGARCH (1,d,0) et un FIGARCH (1,d,1) sont livrées dans Baillie *et al.* (1996). Pour des modèles d'ordre plus élevé et pour des structures plus complexes, comme celle proposée dans cet article, les conditions deviennent beaucoup plus compliquées. Cette contrainte de positivité peut toutefois être vérifiée au cas par cas comme suggéré par Nelson et Cao (1992).

³³ Une extension naturelle est de permettre au degré d'intégration fractionnaire d de varier avec les jours de la semaine. Ceci sort néanmoins du cadre de ce travail.

2.5 Résultats empiriques

2.5.1 Les données

On peut illustrer la pertinence empirique de l'approche que nous proposons pour l'analyse des effets jours en l'appliquant à quelques séries financières.³⁴ Dans le cadre de cet article, nous nous limitons³⁵ aux quatre séries d'indices boursiers (prix de clôture) suivants :

- Standard and Poor's 500, période du 3 Janvier 1980-8 Juin 1999, soit 4911 observations ;
- Dow Jones, période du 3 Janvier 1980-7 Juin 1999, soit 4910 observations ;
- Nasdaq100, période du 4 Janvier 1983-10 Juin 1999, soit 3705 observations ;
- Bel20, période du 10 Mars 1991-8 Juin 1999, soit 2033 observations.

Pour chaque série, nous considérons la présence d'effets jours dans les séries de rendements, définis comme $r_t = 100 \times (\ln P_t - \ln P_{t-1})$, où P_t désigne le prix de clôture (prix en vigneur à la fin de la journée considérée). Tout comme dans Franses et Paap (1999), nous reportons comme prix de l'indice d'un jour férié, celui du jour précédent. Les graphiques des séries sont reportés en annexe. Nous nous concentrons sur les données du marché financier américain afin de faciliter la comparaison avec la majeure partie des études publiées sur les effets jours.

Une analyse descriptive préliminaire ainsi que l'estimation de simples modèles de régressions linéaires exprimant les rendements (ou leurs carrés) en fonction d'un ensemble de variables muettes journalières, montrent assez clairement la présence d'effets jours. Pour les séries américaines, les hypothèses d'absence d'effet « jour de la semaine », tant en moyenne qu'en variance, sont systématiquement rejetées quels que soient les seuils de significativité retenus. Dans le cas du Bel20, les résultats sont moins significatifs même si la périodicité des carrés des rendements ne peut pas être rejetée. Insistons cependant sur le fait que l'estimation de simples modèles de régressions linéaires peut tout au plus compléter une simple analyse descriptive tant il est clair que ces modèles sont fondamentalement mal spécifiés et donc sujets à une multitude de problèmes de natures économétriques³⁶ qui peuvent rendre les conclusions que l'on en tire hasardeuses.

L'éventuelle présence de périodicité tant dans la moyenne que dans la variance et de longue mémoire dans la variance conditionnelle nous conduit à estimer les différents modèles mentionnés dans la section précédente.

³⁴ Les données et les programmes utilisés pour effectuer les calculs sont disponibles sur demande.

³⁵ Des résultats ont aussi été obtenus pour les indices boursiers d'autres places boursières comme la France, l'Allemagne, etc. Les résultats complémentaires sont disponibles sur requête.

³⁶ Il est néanmoins surprenant que malgré la nature très restrictive de cette approche, celle-ci reste fréquemment utilisée pour l'analyse des effets journaliers.

2.5.2 Méthode d'estimation

Afin de permettre une comparaison directe avec les résultats reportés dans Franses et Paap (1999), nous supposons la normalité conditionnelle de $\eta_t = \tilde{\varepsilon}_t / \sqrt{h_t}$. La log-vraisemblance conditionnelle des différents modèles peut dès lors s'écrire :

$$\ln L(\rho, \tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_T | \varepsilon_0) = -0,5 \ln 2\pi - 0,5 \sum_{t=1}^T \left[\ln h_t + \tilde{\varepsilon}_t^2 \right], \quad t = 1, \dots, T$$

où $\tilde{\varepsilon}_t$ et h_t sont définis dans les équations (15) et (16) pour le PAR-PFIGARCH, ρ est le vecteur de paramètres à estimer et ε_0 indique les conditions initiales nécessaires pour démarrer les récursions. Notons que l'aspect souvent leptokurtique des séries financières rend la Normalité conditionnelle peu réaliste. L'extension au cas non normal sort néanmoins du cadre du présent travail.

Les conditions de régularité sous lesquelles l'estimateur du maximum de vraisemblance est convergent et efficace ont été dérivées pour le modèle IGARCH. A notre connaissance, aucun résultat théorique n'existe pour la classe de modèle que nous envisageons dans ce papier. Les résultats de simulations semblent toutefois indiquer le bon comportement de cet estimateur tant pour la classe de processus FIGARCH (Baillie *et al.*, 1996 ; Bollerslev et Mikkelsen, 1996) que pour les modèles PGARCH (Bollerslev et Ghysels, 1996). Nous suivrons donc cette approche en supposant que ces bonnes propriétés s'étendent aux modèles considérés dans cette étude.

2.5.3 Résultats des estimations

Pour ne pas étendre inutilement la présentation, nous reportons les résultats détaillés pour les modèles suivants :

- PAR(1)-GARCh(1,1) ;
- PAR(1)-PGARCh(1,1) ;
- PAR(1)-FIGARCh(1,1) ;
- PAR(1)-PFIGARCh(1,1).

Dans tous les cas considérés, la structure périodique autoregressive (PAR) sur le moyenne conditionnelle des rendements financiers est maintenue. Pour chaque estimation nous reportons également quelques statistiques utiles pour évaluer la qualité de nos estimations et de nos spécifications. Étant donné que le modèle PAR-PFIGARCH englobe les autres modèles habituellement proposés, il est aisé de tester leur validité au moyen de tests standards de Wald (asymptotiquement χ^2 sous l'hypothèse nulle de la validité des restrictions imposées).

Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'opérateur de différenciation fractionnaire nécessite le calcul d'une somme infinie. Il en résulte que les conditions initiales sont plus exigeantes que dans le cas GARCH standard. En pratique, nous avons fixé les valeurs du « pré-échantillon » de ϵ_t^2 à leur espérance non-conditionnelle. Quant à la somme infinie utilisée pour approximer l'opérateur de différence fractionnaire, celle-ci est tronquée à 1000 retards.

Les résultats de l'estimation des modèles GARCH, PGARCH, FIGARCH et FIGARCH pour les quatre séries étudiées sont livrés dans les Tableaux 1 à 4. Les statistiques présentées dans la partie inférieure de ces tableaux correspondent aux tests de Box-Pierce $Q(20)$ et $Q^2(20)$, aux critères d'information traditionnels (Akaike, Schwarz, Shibata et Hannan-Quinn), aux fonctions de perte ou « Loss functions » (MSE, HMSE et LL)³⁷, au paramètre d'asymétrie (b_3) et à la kurtosis (b_4). Le Tableau 5, quant à lui, reporte les tests de Wald qui nous permettent de discriminer entre les différents modèles estimés.

L'analyse de ces résultats d'estimation appelle plusieurs constats.

Tout d'abord, les tests de Box-Pierce, sur les résidus standardisés et leurs carrés, indiquent que les quatre séries étudiées ne souffrent plus de corrélation sérielle et que les différentes modélisations ont correctement décrit le phénomène de « cluster » de volatilité (effets ARCH).

Il apparaît ensuite, à l'aide du dernier tableau, que la structure AR non-périodique est très largement rejetée (H1) en faveur d'une structure périodique (PAR) pour les trois séries américaines. Le paramètre autorégressif relatif au lundi est à ce propos toujours positif, significativement différent et largement supérieur aux autres jours de la semaine, ce qui indique une corrélation positive entre les rendements du lundi et du vendredi³⁸. Pour cette raison, nous gardons cette structure périodique tout au long de cette étude.³⁹ Ensuite, ce même tableau nous informe de l'importance de l'inclusion de variables muettes dans l'équation de la variance conditionnelle (H3) alors qu'elles semblent nettement moins justifiées dans la moyenne conditionnelle (H2). Toutefois, nous n'interprétons pas ces résultats en détail pour deux raisons. D'une part, ces paramètres sont fonction des multiples paramètres autorégressifs, ce qui complique considérablement leur interprétation. D'autre part, des Tableaux 1 à 4, il apparaît que ces effets jours sont très différents d'une série à l'autre. Il ne se dégage donc pas de tendance commune aux quatre séries, ainsi qu'aux trois séries américaines. Notre attention se portera par contre sur la périodicité de la persistance des chocs.

³⁷ Voir Bollerslev et Ghysels (1996) pour plus de détails.

³⁸ Ce résultat est en accord avec les travaux de Franses et Paap (1999).

³⁹ Par souci d'homogénéité, nous gardons également cette structure pour le Bel20, cette structure n'altérant pas les autres résultats.

Tableau 1 : Modèle PAR-GARCH

	S&P500	Dow Jones	Nasdaq100	Bel20
	β_1	0.9158 [104.085]	0.9126 [98.155]	0.8067 [49.725]
α_1	0.0726 [9.965]	0.0726 [9.893]	0.1666 [10.961]	0.0805 [6.191]
μ_{LUN}	0.0297 [1.090]	0.0728 [2.502]	-0.0674 [-2.327]	0.0377 [0.929]
μ_{MAR}	0.0681 [2.736]	0.0702 [2.733]	0.0554 [2.164]	0.0607 [1.987]
μ_{MER}	0.0971 [4.376]	0.0890 [3.758]	0.1761 [7.217]	0.0234 [0.663]
μ_{JEU}	0.0386 [1.563]	0.0319 [1.235]	0.1207 [4.858]	0.0408 [1.275]
μ_{VEN}	0.0749 [2.782]	0.0719 [2.541]	0.1261 [4.857]	0.0763 [2.078]
ω_{LUN}	-0.0057 [-0.216]	0.0275 [0.901]	0.0397 [1.603]	0.1143 [3.898]
ω_{MAR}	-0.0316 [-1.008]	-0.0874 [-2.501]	0.0398 [1.967]	-0.1785 [-6.710]
ω_{MER}	-0.0975 [-3.271]	-0.0734 [-2.266]	-0.0364 [-1.295]	0.1198 [3.276]
ω_{JEU}	0.0965 [3.898]	0.0958 [3.294]	0.0383 [1.536]	-0.0616 [-1.836]
ω_{VEN}	0.1079 [4.496]	0.1303 [4.953]	0.0694 [2.858]	0.1428 [4.607]
ϕ_{LUN}	0.1895 [5.397]	0.1461 [4.063]	0.4797 [10.798]	0.2265 [3.914]
ϕ_{MAR}	-0.0831 [-2.603]	-0.0658 [-2.097]	0.1265 [3.458]	0.0838 [1.864]
ϕ_{MER}	0.0683 [2.172]	0.0376 [1.165]	0.1872 [5.026]	0.1858 [3.269]
ϕ_{JEU}	0.0802 [2.194]	0.0520 [1.411]	0.2042 [5.041]	0.1674 [3.255]
ϕ_{VEN}	0.0717 [1.968]	0.0617 [1.680]	0.1897 [4.428]	0.0893 [1.502]
$Q^2(20)$	23.135	23.343	14.866	19.210
$Q^2(20)$	11.641	12.177	16,478	5,580
AKAIKE	2,554	2,634	2,401	2,287
SCHWARZ	2,576	2,657	2,429	2,334
SHIBATA	2,554	2,634	2,401	2,287
HANNAN-QUINN	2,561	2,642	2,411	2,304
MSE	52,630	8,646	10,417	2,795
HMSE	7,575	9,456	4,690	6,348
LL	7,480	7,424	8,535	7,866
b_3	-0,591	-0,632	-0,666	-0,385
b_4	5,533	7,410	2,627	4,380
Log Likelihood	-6251,915	-6449,622	-4429,032	-2305,964

Notes : - Les t-statistiques sont entre crochets.

- $Q^2(20)$ et $Q^2(20)$ sont les statistiques de Box-Pierce sur les résidus et résidus au carré, standardisés, avec 20 retards.

- b_3 et b_4 sont les paramètres d'asymétrie et d'excès de la kurtosis

Tableau 2 : Modèle PAR-FGARCH

	S&P500	Dow Jones	Nasdaq100	Bel20
β_1	0.9199 [102.283]	0.9179 [94.456]	0.8068 [49.533]	0.8846 [49.573]
α_{LUN}	0.0827 [5.859]	0.0813 [5.047]	0.2347 [6.347]	0.0734 [2.696]
α_{MAR}	0.0385 [3.748]	0.0298 [3.198]	0.1503 [6.000]	0.0627 [3.015]
α_{MER}	0.0761 [6.061]	0.0668 [5.237]	0.1166 [4.630]	0.0505 [1.823]
α_{JEU}	0.0634 [3.855]	0.0831 [4.711]	0.1187 [3.713]	0.0684 [2.466]
α_{VEN}	0.0939 [5.057]	0.0925 [5.197]	0.2291 [8.412]	0.1515 [4.196]
μ_{LUN}	0.0265 [0.957]	0.0680 [2.284]	-0.0719 [-2.485]	0.0356 [0.847]
μ_{MER}	0.0701 [2.812]	0.0697 [2.705]	0.0519 [1.966]	0.0598 [0.847]
μ_{MAR}	0.0963 [4.261]	0.0873 [3.667]	0.1712 [8.844]	0.0222 [0.622]
μ_{JEU}	0.0430 [1.756]	0.0350 [1.367]	0.1218 [4.963]	0.0518 [1.650]
μ_{VEN}	0.0728 [2.727]	0.0699 [2.479]	0.0792 [5.054]	0.0792 [2.140]
ω_{LUN}	-0.0110 [-0.413]	0.0187 [0.601]	0.0256 [1.039]	0.1207 [4.144]
ω_{MAR}	-0.0157 [-0.500]	-0.0700 [-1.983]	0.0469 [1.599]	-0.1918 [-6.634]
ω_{MER}	-0.0968 [-3.209]	-0.0884 [-2.064]	-0.0238 [-0.820]	0.1307 [3.497]
ω_{JEU}	0.0939 [3.748]	0.0862 [2.922]	0.0518 [1.948]	-0.0564 [-1.682]
ω_{VEN}	0.0924 [3.760]	0.1180 [4.458]	0.0521 [2.086]	0.1281 [4.191]
ϕ_{LUN}	0.1924 [5.275]	0.1560 [4.146]	0.4805 [10.346]	0.2177 [3.689]
ϕ_{MAR}	-0.0880 [-2.829]	-0.0688 [-2.273]	0.1303 [3.460]	0.0901 [1.938]
ϕ_{MER}	0.0643 [2.025]	0.0942 [1.070]	0.1897 [5.109]	0.1875 [3.341]
ϕ_{JEU}	0.0740 [2.036]	0.0441 [1.184]	0.1944 [5.060]	0.1574 [3.180]
ϕ_{VEN}	0.0732 [1.997]	0.0675 [1.805]	0.1875 [4.360]	0.0987 [1.600]
Q ² (20)	23.288	23.187	14.866	19.954
AKAIKE	10.448	12.238	16.478	6.010
SCHWARZ	2.552	2.631	2.399	2.288
SHIBATA	2.552	2.659	2.434	2.346
HANNAN-QUINN	2.552	2.631	2.399	2.287
MSE	2.562	2.641	2.309	2.309
HMSE	51.793	8.462	10.399	2.782
LL	7.119	8.669	4.600	6.282
b _s	7.525	7.443	8.620	7.877
b _a	-0.548	-0.585	-0.647	-0.372
b ₄	5.081	6.631	2.627	4.313
Log Likelihood	-6245.148	-6439.168	-4421.402	-2302.66

Notes : - Les t-statistiques sont entre crochets.

- Q²(20) et Q²(20) sont les statistiques de Box-Pierce sur les résidus et résidus au carré, standardisés, avec 20 retards.

- b_s et b_a sont les paramètres d'asymétrie et d'excès de la kurtosis

Tableau 3 : Modèle PAR-FGARCH

	S&P500	Dow Jones	Nasdaq100	Bel20
d	0.3850 [7.675]	0.3817 [7.281]	0.4785 [8.866]	0.3089 [5.091]
β_1	0.6139 [10.178]	0.6166 [10.273]	0.4623 [4.459]	0.5955 [6.291]
θ_1	0.3392 [6.915]	0.3482 [6.511]	0.1954 [2.564]	0.4030 [5.030]
μ_{LUN}	0.0316 [1.175]	0.0761 [2.642]	-0.0626 [-2.126]	0.0507 [1.119]
μ_{MAR}	0.0679 [2.700]	0.0699 [2.716]	0.0567 [2.200]	0.0599 [2.010]
μ_{MER}	0.0980 [4.402]	0.0984 [3.715]	0.1841 [7.611]	0.0233 [0.694]
μ_{JEU}	0.0412 [1.679]	0.0306 [1.207]	0.1294 [5.311]	0.0444 [1.370]
μ_{VEN}	0.0821 [3.039]	0.0792 [2.783]	0.1306 [4.922]	0.0794 [2.297]
ω_{LUN}	0.1234 [3.777]	0.1765 [4.698]	0.1046 [4.026]	0.4065 [7.067]
ω_{MAR}	0.1060 [3.650]	0.0909 [2.907]	0.1049 [4.145]	-0.0185 [-0.651]
ω_{MER}	-0.0114 [-0.601]	0.0062 [0.285]	0.0261 [1.277]	0.0724 [2.271]
ω_{JEU}	0.0742 [2.915]	0.0666 [2.323]	0.0294 [1.373]	0.0308 [0.943]
ω_{VEN}	0.1722 [5.701]	0.2030 [6.099]	0.1097 [4.547]	0.0868 [2.438]
ϕ_{LUN}	0.1963 [5.403]	0.1532 [4.112]	0.4964 [10.749]	0.2299 [3.545]
ϕ_{MAR}	-0.0791 [-2.380]	-0.0613 [-1.876]	0.1364 [3.672]	0.0863 [1.923]
ϕ_{MER}	0.0654 [2.006]	0.0342 [1.017]	0.1769 [4.675]	0.1994 [3.526]
ϕ_{JEU}	0.0776 [2.096]	0.0565 [1.522]	0.2037 [4.962]	0.1732 [3.211]
ϕ_{VEN}	0.0601 [1.565]	0.0427 [1.083]	0.1950 [4.346]	0.1024 [1.780]
Q ² (20)	24.634	24.269	15.120	20.703
AKAIKE	7.770	13.099	10.515	4.217
SCHWARZ	2.548	2.628	2.394	2.281
SHIBATA	2.572	2.652	2.424	2.331
HANNAN-QUINN	2.548	2.628	2.394	2.281
MSE	2.556	2.637	2.405	2.299
HMSE	52.017	8.563	9.930	2.784
LL	6.374	7.967	4.494	5.422
b _s	7.439	7.537	8.565	8.096
b _a	-0.496	-0.527	-0.656	-0.291
b ₄	4.382	6.039	2.547	3.472
Log Likelihood	-6236.563	-6434.777	-4415.839	-2298.936

Notes : - Les t-statistiques sont entre crochets.

- Q²(20) et Q²(20) sont les statistiques de Box-Pierce sur les résidus et résidus au carré, standardisés, avec 20 retards.

- b_s et b_a sont les paramètres d'asymétrie et d'excès de la kurtosis

Tableau 4 : Modèle PAR-PFIGARCH

	S&P500	Dow Jones	NASDAQ100	BEI20
d	0,3329 (8,385)	0,3070 (7,860)	0,4840 (7,142)	0,3228 (5,301)
β_1	0,8083 (13,637)	0,8021 (13,559)	0,4995 (6,083)	0,6584 (8,120)
$\theta_{1,LUN}$	0,5692 (10,437)	0,6416 (11,914)	0,3098 (3,553)	0,3346 (3,619)
$\theta_{1,MAR}$	0,3066 (7,586)	0,3192 (9,205)	0,2571 (3,109)	0,4701 (5,719)
$\theta_{1,MER}$	0,3159 (6,241)	0,3197 (4,984)	0,1461 (1,924)	0,5388 (3,806)
$\theta_{1,JEU}$	0,2784 (6,243)	0,2968 (6,863)	0,1457 (1,700)	0,5489 (4,182)
$\theta_{1,VEN}$	0,2924 (6,033)	0,3103 (6,780)	0,2305 (2,130)	0,4218 (4,555)
$\mu_{1,LUN}$	0,0243 (0,883)	0,0243 (2,205)	-0,0582 (-1,971)	0,0468 (1,050)
$\mu_{1,MAR}$	0,0856 (2,592)	0,0885 (2,639)	0,0504 (1,908)	0,0606 (2,060)
$\mu_{1,MER}$	0,0854 (3,804)	0,0854 (3,035)	0,1743 (7,082)	0,0224 (0,667)
$\mu_{1,JEU}$	0,0431 (1,769)	0,0431 (1,258)	0,1272 (5,103)	0,0393 (1,204)
$\mu_{1,VEN}$	0,0797 (3,049)	0,0772 (2,881)	0,1337 (5,071)	0,0752 (2,168)
$\omega_{1,LUN}$	0,1839 (4,957)	0,1839 (6,209)	0,1189 (4,233)	0,3849 (6,543)
$\omega_{1,MAR}$	0,1045 (3,407)	0,0980 (2,804)	0,1071 (4,082)	-0,0230 (-0,825)
$\omega_{1,MER}$	-0,0104 (-0,486)	0,0137 (0,546)	0,0145 (0,691)	0,0821 (2,370)
$\omega_{1,JEU}$	0,0633 (2,383)	0,0657 (2,082)	0,0146 (0,674)	0,0366 (1,111)
$\omega_{1,VEN}$	0,1528 (4,988)	0,1808 (5,244)	0,1109 (3,953)	0,0770 (2,131)
$\phi_{1,LUN}$	0,1860 (4,563)	0,1503 (3,598)	0,5027 (10,593)	0,2177 (3,618)
$\phi_{1,MAR}$	-0,0888 (-2,852)	-0,0710 (-2,346)	0,1357 (0,1784)	0,0834 (1,847)
$\phi_{1,MER}$	0,0595 (1,951)	0,0331 (1,076)	0,1784 (4,865)	0,1891 (3,112)
$\phi_{1,JEU}$	0,1082 (3,078)	0,0828 (2,435)	0,2082 (5,271)	0,1902 (3,206)
$\phi_{1,VEN}$	0,0776 (2,218)	0,0708 (2,050)	0,1859 (4,182)	0,1008 (1,758)
Q(20)	25,016	23,938	15,416	20,097
$\alpha^2(20)$	10,481	13,448	10,371	4,031
AKAIKE	2,534	2,610	2,394	2,282
SCHWARZ	2,563	2,639	2,431	2,343
SHIBATA	2,534	2,610	2,394	2,282
HANNAN-QUINN	2,544	2,620	2,407	2,305
MSE	51,175	8,403	9,965	2,782
HMSE	4,824	5,312	4,461	5,256
LL	7,446	7,403	8,605	7,878
b_a	-0,360	-0,315	-0,643	-0,298
b_b	2,788	3,318	2,513	3,294
Log Likelihood	-6199,325	-6385,235	-4411,799	-2296,225

Notes : - Les statistiques sont entre crochets.

- Q(20) et $\alpha^2(20)$ sont les statistiques de Box-Pierce sur les résidus et résidus au carré, standardisés, avec 20 retards.

- b_a et b_b sont les paramètres d'asymétrie et d'excès de la kurtosis

Tableau 5 : Tests de Wald

	S&P500	Dow Jones	NASDAQ100	BEI20
H1	35,310 ***	22,562 ***	39,112 ***	3,985
H2	5,041	2,370	61,558 ***	1,744
H3	35,769 ***	36,065	4,599	103,941 ***
H4	14,772 ***	23,727 ***	13,662 ***	5,873
H1	34,039 ***	22,409 ***	42,566 ***	4,896
H2	4,561	2,188	57,747 ***	1,593
H3	37,941 ***	39,741 ***	21,069 ***	47,548 **
H5	70,303 ***	61,779 ***	51,008 ***	28,099 **
H6	50,860 ***	63,254 ***	8,262 *	7,496

Notes : k est le nombre de restrictions imposées par les différents tests. * ** et *** Tests respectivement significatifs à 10, 5 et 1 %.

La pertinence de la modélisation PGARCH proposée par Bollerslev Ghysels (1996) et Franses et Paap (1999) est également confirmée par le test (Wald (Hypothèses H4 et H6, respectivement pour les modèles PGARCH et PFIGARCH), par la comparaison des critères d'information et des fonctions de perte « Loss functions »⁴⁰ pour les trois séries américaines.⁴¹ Deux effets semblent marquer ces trois séries : un effet clôture du marché (effet week-end, ou effet lun et dans une moindre mesure, effet vendredi) et un effet milieu de semaine. La Figure 4 présente les fonctions de réponse cumulées périodiques du S&P500. Les cercles, carrés, triangles, plus et diamant correspondent respectivement au lundi mardi, mercredi, jeudi et vendredi. De cette Figure, il ressort clairement que les lundis et vendredis sont caractérisés par une persistance nettement supérieure d'chocs sur la volatilité.⁴²

En effet, la persistance des chocs relatifs à certains jours de la semaine est infinie, voir explosive si $(\alpha_{1,j} + \beta_1) > 1$, sans pour cela affecter les propriétés stationnaires du processus global lorsque. De ces premiers résultats, il apparaît clairement que la persistance des chocs, modélisée ou non de manière périodique indique une forte persistance au cours du temps, ce qui sous-entend l'existence d'une racine unitaire dans la variance conditionnelle de ces séries (FIGARCH et PIGARCH).

⁴⁰ Pour les trois séries américaines, les critères d'information d'Akaike et de Shibata et les « L fonctions » MSE et HMSE suggèrent l'adoption d'une modélisation PGARCH.

⁴¹ Franses et Paap (1999) trouvent un résultat similaire pour le S&P500. La version préliminaire de cet article met en évidence le même résultat pour le Dow Jones.

⁴² $(\alpha_{1,Lun} + \beta_1)$ et $(\alpha_{1,Ven} + \beta_1) > 1$.

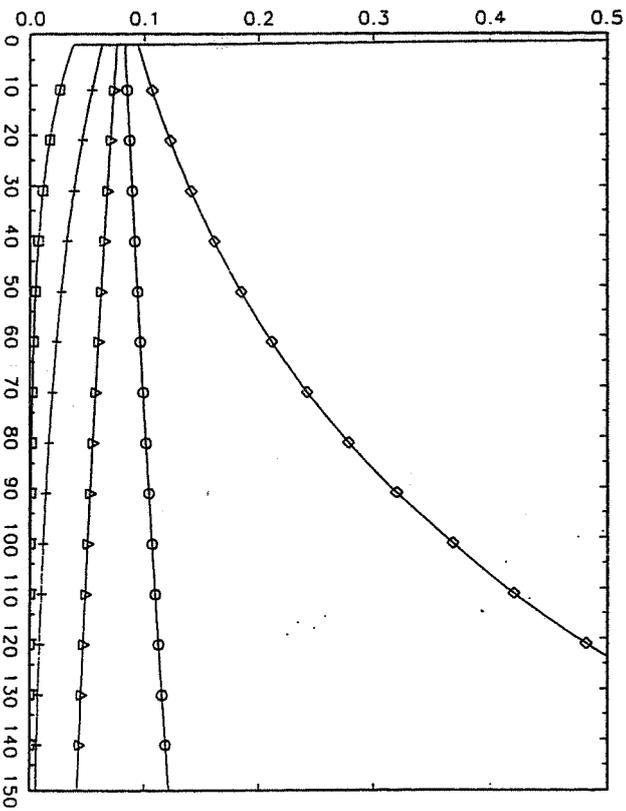


Figure 3 : Fonctions de réponse cumulée (aux impulsions) périodiques.

Comme évoqué brièvement à la section 2, Baillie *et al.* (1996) proposent une modélisation plus souple de cette variance conditionnelle (FIGARCH), qui englobe à la fois les modèles GARCH et IGARCH. Les résultats reportés dans les Tableaux 1 à 4 montrent le bien fondé de la spécification FIGARCH. En effet, la dynamique de long terme semble être modélisée de manière adéquate par le paramètre de différenciation fractionnaire d , hautement significatif. Celui-ci est compris entre 0,30 pour le Bel20 et 0,47 pour le Nasdaq100, ce qui implique que le processus de volatilité est plus proche d'un processus stationnaire stable GARCH que d'un processus IGARCH. Nos résultats se révèlent sur ce point être très uniformes, ce qui permet de conclure à un degré de persistance similaire entre les quatre indices boursiers. De plus, du Tableau 5 (H5), on peut constater que la modélisation fractionnaire apparaît préférable à la modélisation GARCH traditionnelle pour toutes les séries

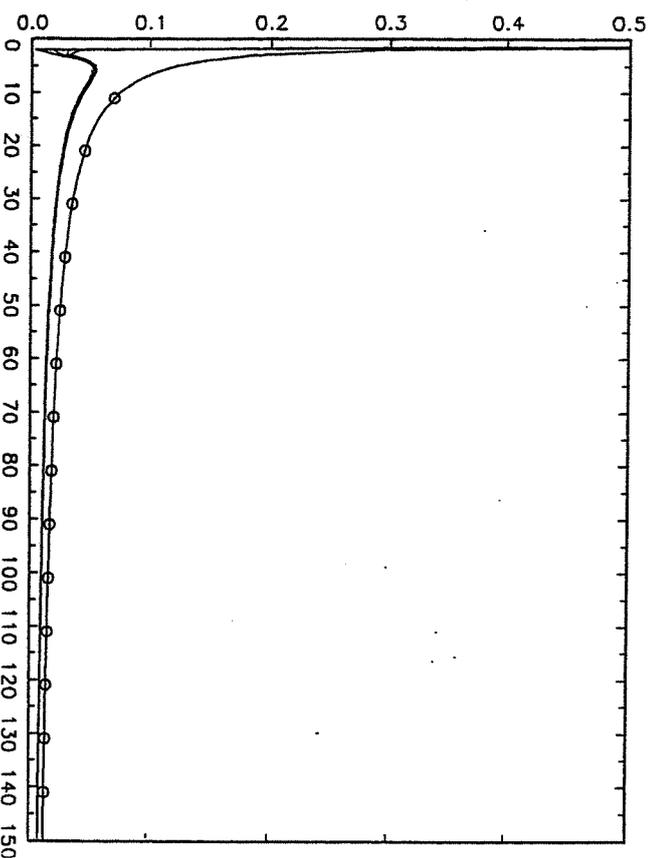


Figure 4 : Fonctions de réponse cumulée (aux impulsions) périodique Modélisation PAR-PFIGARCH du S&P500. Les cercles correspondent au lundi.

Notons également que si la réponse cumulée à un choc ayant lieu un jour apparaît plus persistante que les autres jours, cette différence n'est vraie que sur l'horizon assez court (environ 20 jours), ce qui renforce l'idée selon laquelle cette classe de modèles capture essentiellement les effets périodiques de court terme.

On notera finalement que les statistiques b_3 et b_4 (reportées dans 1 Tableaux 1 à 4), étudiées.

Le modèle proposé dans cet article permet de généraliser les travaux de Bollerslev et Ghysels (1996) et Franses et Paap (1999) au cas de processus fractionnellement intégrés. L'étude des Tableaux 1 à 5 nous enseigne tout d'abord que cette spécification PAR-PFIGARCH est largement validée pour le S&P500 (le Dow Jones (au seuil de 1 %) et dans une moindre mesure pour le Nasdaq (seuil de 10 %). L'explication de ce dernier résultat mériterait une étude plus approfondie qui sort malheureusement du cadre de cette illustration empirique.

Remarquons que le lundi est, pour ces différentes séries, un jour très particulier en terme de persistance des chocs sur la volatilité. En effet, pour les deux premières séries, le coefficient $\theta_{1,Lun}$ est le double des autres jours. Le graphique des fonctions de réponse cumulées périodiques du S&P500 traduit bien ce différentiel de persistance entre le lundi et les autres jours de la semaine. respectivement l'excès de skewness (asymétrie) et de la kurtosis, indiquent clairement le rejet de l'hypothèse de normalité des résidus standardisés. Toutefois, il est à noter que l'introduction de la périodicité de la persistance des chocs (modèles PGARCH et FIGARCH) décroît sensiblement ces deux statistiques (et par conséquent la non-normalité des résidus) lorsque cette périodicité est confirmée par un test du rapport de vraisemblance (ce qui est le cas pour les deux premières séries). Ce dernier point accroit évidemment l'intérêt de la modélisation proposée et mériterait une analyse plus fine.

3. Conclusion

Il est utile de bien rappeler quels étaient les buts que nous nous sommes fixés au début de cette étude. L'idée principale est de proposer une approche qui peut être utilisée pour modéliser, espérons-le, de manière plus précise et adéquate les périodicités que l'on observe fréquemment au sein des séries financières, tout en tenant compte de la dynamique de la volatilité et surtout du caractère mémoire longue de cette dynamique. Nous avons appliqué cette idée à différents indices boursiers avec comme but avoué de fournir quelques résultats illustratifs sur la présence ou non d'effets jours tant sur les rendements de ces indices boursiers que sur leur volatilité. Les résultats obtenus sont encourageants et, bien qu'hétérogènes, semblent indiquer que l'approche que nous proposons peut s'avérer utile pour une meilleure compréhension de la structure de la dynamique des séries financières.

Nous devons néanmoins rester prudent quant à l'interprétation définitive des quelques résultats empiriques obtenus dans cet article. La découverte d'effets périodiques/saisonniers statistiquement significatifs dans les rendements et dans leur volatilité n'implique naturellement pas automatiquement que ces effets « jour de la semaine » soient nécessairement économiquement significatifs. Ce point nous paraît important car si de nombreuses études semblent reporter l'une ou l'autre forme de régularités saisonnières, relativement peu sont à même de montrer clairement leur fondement économique. Comme le font remarquer à la fois Lakonishok et Smidt (1988), Thaler (1987) et surtout Sullivan *et al.* (1998), le danger existe en effet que ces anomalies, si difficilement explicables d'un point de vue théorique, soient en tout ou en partie le fruit du désordre mais célèbre problème de « data mining » ou de « data snooping », puisque le même échantillon de données sert souvent à formuler des hypothèses économiques et ensuite à les tester, ce qui résulte naturellement en de sérieuses distorsions des propriétés statistiques des outils utilisés. Tout en étant conscient de ces limites, nous pensons que d'un point

de vue méthodologique, l'utilisation de la classe des modèles PAR-FIGARCH envisagée dans cet article peut être intéressante à plus d'un titre. Les gains potentiels en terme de prévisions à court terme de la volatilité viennent à l'esprit mais cela nécessiterait une étude plus détaillée qui dépasse largement du cadre du présent article.

De nombreuses extensions sont envisageables et certainement souhaitable. D'un point de vue économétrique, l'extension du PAR-FIGARCH à des éléments tels que l'asymétrie et/ou la non-normalité est assez directe et mériterait notre attention. De même, une version multivariée ou à facteurs permettrait de prendre en compte les inter-relations dynamiques complexes entre les différents marchés nationaux. Cette classe de modèle pourrait également être utilisée pour étudier des données à haute fréquence, telles que les données intra-journalières (à intervalle d'une heure, 30, 10 et voir même, 5 minutes), où la périodicité⁴³ joue un rôle très important.

Nous avons envisagé une extension fidèle du modèle PGARCH de Bollerslev et Ghysels (1996) et Franses et Paap (1999) où l'intérêt est la modélisation de la périodicité (journalière) de la persistance des chocs sur le court terme. Il serait également intéressant d'étendre cette paramétrisation de périodicité aux coefficients α , β et γ pour étudier, par exemple, la robustesse de persistance des chocs sur le court et le long terme (avant et après un événement important tel qu'un accord, une crise, etc.).

D'un point de vue économique, une étude plus détaillée des périodicités observées dans nos résultats serait utile. Une telle extension couvrant un plus grand nombre de places boursières et/ou d'indices boursiers sur de plus longues périodes permettrait peut-être de dégager d'intéressantes régularités empiriques.

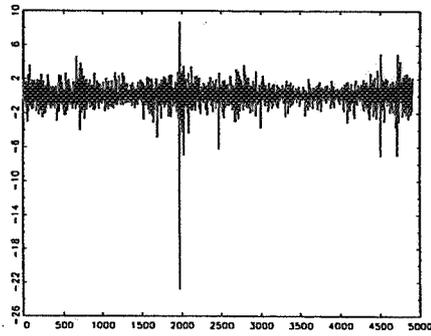
Bibliographie

- Abraham, A et D.L. Ikenberry (1994), The Individual Investor and the Weekend Effect, *Journal Financial and Quantitative-Analysis*, 29(2), 263-77.
- Baillie, R.T. (1996), Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics, *Journal Econometrics*, 73(1), 5-59.
- Baillie, R.T., Bollerslev, T. et H.O. Mikkelsen (1996), Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 74, 3-30.
- Beine, M., Laurent, S. et C. Lecourt (1999), Accounting for conditional leptokurtosis and daily effects in FIGARCH models of daily exchange rates. Paper presented at the Sixth Workshop Financial Modeling and Econometric Analysis, Lille III, January 1999.

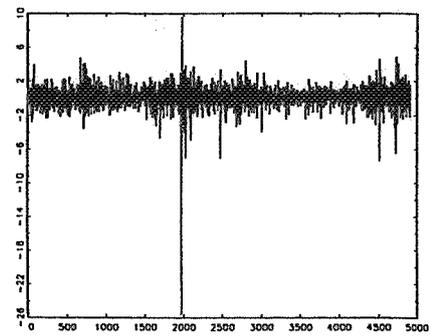
⁴³ La périodicité intra-journalière est plus riche que la périodicité journalière car elle inclut également des phénomènes d'ouverture et de fermeture de marché, des effets pauses (midday) etc.

- Bera, A.K. et M.L. Higgins (1994), ARCH Models : Properties, Estimation and testing, *Journal of Economic Surveys*, 7(4), 305-362.
- Bessembinder, H. et M. Hertzal (1993), Return Autocorrelations around Nontrading Days, *Review of Financial Studies*, 6(1), 155-89.
- Bollerslev, T. (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- Bollerslev, T., Engle, R.F. et D.B. Nelson (1994), ARCH Models, in : R.F. Engle et D. Mc Fadden (eds), *Handbook of Econometrics Vol.4*, North Holland, Amsterdam.
- Bollerslev, T. et E. Ghysels (1996), Periodic Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Business and Economic Statistics*, 14(2), 139-152.
- Bollerslev, T. et H.O. Mikkelsen (1996) Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility, *Journal of Econometrics*, 73(1), 151-84.
- Bollerslev, T. et H.O. Mikkelsen (1999), Long-Term Equity Anticipation Securities and Stock Market Volatility Dynamics, *Journal of Econometrics* (à paraître).
- Bollerslev, T., Chou, R.Y. et K.F. Kroner (1992), ARCH Modeling in Finance : a Review of the Theory and Empirical Evidence, *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.
- Boswijk H.P. et P.H. Franses (1996), Unit Roots in Periodic Autoregressions, *Journal of Time Series Analysis*, 17, 221-245.
- Breidt, F.J., Crato, N., et P. de Lima (1998), The Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility SO : *Journal of Econometrics*, 83(1-2), 325-48.
- Brockwell, P.J. et R. Davis (1998), *Time Series : Theory and methods*, Springer-Verlag, New York, NY.
- Dimson, E. (1988), *Stock Market Anomalies*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Ding, Z., Granger, C.W.J. et R.F. Engle (1993), A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model, *Journal of Empirical Finance*, 1, 83-105.
- Ding, Z. et C.W.J. Granger (1996), Modeling Volatility Persistence of Speculative Returns : An New Approach, *Journal of Econometrics*, 73, 185-215.
- Droesbeke, J.-J., Fichet, B. et P. Tassi eds. (1994), *Modélisation ARCH : Théorie Statistique et Application dans le Domaine de la Finance*, Editions Ellipses, Bruxelles.
- Ederington, L.H. et J.H. Lee (1993), How Markets Process Information : News Releases and Volatility, *Journal of Finance*, 48(4), 1161-1191.
- Engle, R.F. et Bollerslev, T., 1986, Modeling the Persistence of Conditional Variances, *Econometric Reviews*, 5, 1-50.
- Foster, F.D. et S. Viswanathan (1994), A Theory of the Intraday Variations in Volume, Variance, and Trading Costs in Securities Markets, *Review of Financial Studies*, 3(4), 593-624.
- Franses, P.H. et R. Paap (1999), Modeling Day-of-the-week Seasonality in the S&P 500 Index, *Applied Financial Economics* (à paraître).
- Franses, P.H. (1996), *Periodicity and Stochastic Trends in Economic Times Series*, Oxford University Press, Oxford.
- French, K.R. (1980), Stock Returns and the Weekend Effect, *Journal of Financial Economics*, 8, 55-70.
- Gourieroux, C. (1992), *Modèles ARCH et Applications Financières*, Economica, Paris.
- Granger, C.W.J. et R. Joyeux (1980), An Introduction to Long-Memory Time Series Models Fractional Differencing, *Journal of Time Series Analysis*, 1, 15-29.
- Hosking, J.R.M. (1984), Modeling Persistence in Hydrological Times Series Using Fractional Differencing, *Water Resources Research*, 20, 1898-1908.
- Keim, D.B. et R.F. Stambaugh (1984), A Further Investigation of the Weekend Effect in Stock Returns, *Journal of Finance*, 39(3), 819-35.
- Lakonishok, J. et E. Maberly, (1990) The Weekend Effect : Trading Patterns of Individual Institutional Investors, *Journal of Finance*, 45(1), 231-43.
- Lakonishok, J. et M. Levi (1985), Weekend Effects on Stock Returns : A Note, *Journal of Finance*, 37(3), 883-89.
- Lakonishok, J. et S. Smidt (1988), Are Seasonal Anomalies Real ? A Ninety-year Perspective Review of Financial Studies, 1(4), 403-425.
- Levi, M. (1988), Weekend Effects in Stock Market Returns : An Overview, in : Dimson, E. (ed.) *Stock market anomalies*, Cambridge University Press, 43-51.
- McCurdy, T.H. et P.K. Michaud (1997), Capturing Long Memory in the Volatility of Equity Return a Fractionally Integrated Asymmetric Power ARCH Model, Mimeo, University of Toronto.
- Nelson, D.B. (1991), Conditional Heteroskedasticity in Assets Returns : A New Approach, *Econometrica*, 59, 347-370.
- Nelson, D.B. et C.Q. Cao (1992), Inequality Constraints in the Univariate GARCH model, *Journal Business & Economic Statistics*, 10, 229-235.
- Pagan, A. (1996), The Econometrics of Financial Markets, *Journal of Empirical Finance*, 3, 15-102.
- Palm, F.C. (1996), GARCH Models of Volatility, in : Maddala, G.S. et C.R. Rao (eds), *Handbook Statistics*, 7, 14, 209-240.
- Robinson, P.M. (1991), Testing for Strong Serial Correlation and Dynamic Condition Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 47, 67-84.
- Sullivan, R., Timmerman, A. et H. White (1998), Dangers of Data-driven Inference : The Case Calendar Effects in Stock Returns, UCSD Discussion paper 98-16, San Diego.
- Tse, Y.K. et A.K. Tsui (1996), Long-Memory Volatility in Stock Returns : Evidence from Four Asian Pacific Markets, in Chen, A. et K.C. Chan (eds.), *Research in finance*, JAI Press, 33-54.
- Thaler, R.H. (1987), Anomalies : Weekend, Holiday, Turn of the Month and Intraday Effects, *Journal of Economic Perspectives*, 1(2), 169-178.
- Wang, K., Li, Y. et J. Erickson, (1997), A New Look at the Monday Effect, *Journal of Finance*, 52(3) 2171-86.

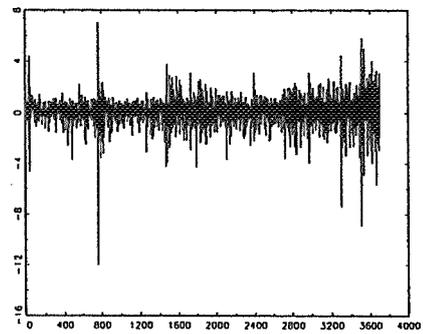
Annexe : Graphiques des séries étudiées



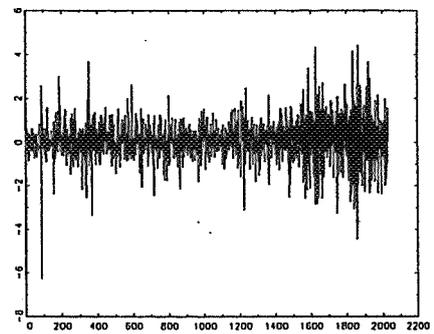
Rendements journaliers du S&P500.



Rendements journaliers du Dow Jones



Rendements journaliers du Nasdaq100



Rendements journaliers du Bel20